GHID DE RECAPITULARE A MATERIEI DE CLASA A IX-A
LA MATEMATICĂ

Auxiliar curricular

PROF. MIHAELA BASARABĂ
COLEGIUL ECONOMIC „DIONISIE POP MARȚIAN" ALBA IULIA
G 19

Cuprins

Pag.

Introducere

Matematica reprezintă un domeniu important de studiu în anii de şcoală şi în acelaşi timp o probă importantă la examenul de bacalaureat, examenul „maturităţii”.De aceea pregătirea acestui examen trebuie să se facă cu multă seriozitate.

Ghidul propus se adresează elevilor din clasa a XII-a care se pregătesc pentru bacalaureat şi doresc să recapituleze sistematic, eficient şi rapid materia studiată în primul semestru al clasei a IX-a.

Lucrarea conţine două capitole: Funcţia de gradul al doilea şi Progresii. În fiecare capitol sunt precizate competenţele generale şi obiectivele specifice, cateva noţiuni teoretice generale cuprinse în fişa de documentare, o fişă de lucru şi o fişă de autoevaluare. Ghidul a fost elaborat pentru a fi utilizat la clasă şi de aceea are o fişă de lucru care se va folosi sub îndrumarea profesorului, şi la sfârşit o fişa de autoevaluare pe care elevii o vor rezolva acasă şi pentru care am întocmit şi un barem, pentru a uşura autoevaluarea.

Capitolul 1

FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA

Competenţe generale :

1. Folosirea terminologiei specifice matematicii în contexte variate de aplicare
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural sau contextual, cuprinse în enunţuri matematice
3. Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice în rezolvarea de probleme
4. Exprimarea şi redactarea coerentă, în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme
5. Analiza de situaţii-problemă, în scopul descoperirii de strategii pentru optimizarea soluţiilor
6. Generalizarea unor proprietăţi prin modificarea contextului iniţial de definire a problemei sau prin generalizarea algoritmilor

Obiective :

1. Exprimarea proprietăţilor funcţiei de gradul al II –lea prin condiţii algebrice sau geometrice
2. Utilizarea relaţiilor lui Viete pentru caracterizarea soluţiilor unei ecuaţii de gradul al II-lea
3. Rezolvarea cu ajutorul funcţiei de gradul al II-lea a unei situaţii-problemă şi interpretarea rezultatului

FUNCŢIA DE GRADUL AL II-LEA

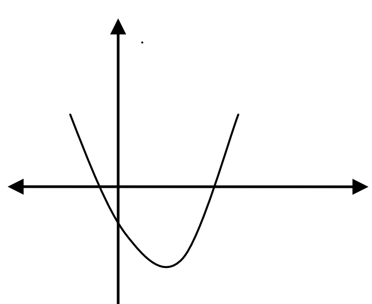
FIŞĂ DE DOCUMENTARE

- Definiţie: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0.$
- Monotonie,punct de extrem:

-dacă $a>0$, atunci f are o valoare minimă $f_{\min}=-\dfrac{\Delta}{4a}$, care se obţine pentru

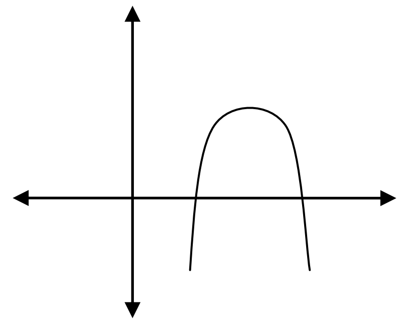
$x_{\min}=-\dfrac{b}{2a}$

$\operatorname{Im} f=\left[-\dfrac{\Delta}{4a},\infty\right).$



- dacă $a<0$, atunci f are o valoare maximă $f_{\max}=-\frac{\Delta}{4a}$, care se obţine pentru $x_{\max}=-\frac{b}{2a}$

$\operatorname{Im} f=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}\right]$.



- Graficul funcţiei de gradul al II-lea este simetric faţă de dreapta $x=-\frac{b}{2a}$ (axa de simetrie).
- Intersecţia cu axele de coordonate:

- $G_f \cap OX=\{A,B\} \Leftrightarrow \Delta>0$; $G_f \cap OX=\{A\} \Leftrightarrow \Delta=0$; $G_f \cap OX=\Phi \Leftrightarrow \Delta<0$.
- $G_f \cap OY=\{M\}, M(0,c)$

- Semnul funcţiei de gradul al II-lea:

- dacă $\Delta>0 \Rightarrow \exists x_{1,} x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$

x	$-\infty$	x_1		x_2		∞
$f(x)$	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

- dacă $\Delta=0 \Rightarrow \exists x_{1,} x_2 \in \mathbb{R}, x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	∞
$f(x)$	semnul lui a	0	semnul lui a

- dacă $\Delta<0 \Rightarrow x_{1,} x_2 \notin \mathbb{R}$

x	$-\infty$	∞
$f(x)$	Semnul lui a	

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ şi $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$.
- Forma canonică: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.
- Relaţiile lui Viete:

-Dacă x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$, atunci

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Dacă se dau x_1, x_2 ,atunci ecuaţia este $x^2 - Sx + P = 0$

- Descompunerea în factori de gradul I: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Ecuaţia are rădăcini reale strict pozitive $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

- Ecuaţia are rădăcini reale strict negative $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

- Ecuaţia are rădăcini reale de semne contrare $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P < 0 \end{cases}$

FIŞĂ DE LUCRU

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (5 - m)x^2 - 2(m+1)x + 1, m \in \mathbb{R} - \{5\}$.

1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei intersectează axa OX în două puncte distincte.
3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care f admite o valoare minimă egală cu -2.
4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei $f(x) = 0$ verifică inegalitatea $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 \geq 0$.
5. Pentru $m = 2$ să se determine:

a) coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu dreapta de ecuaţie $y=2x+1$;
b) soluţiile inecuaţiei $(f\circ f)(x)\le -2$;
c) valoarea expresiei $E=\frac{x_1^2+1}{x_2+1}+\frac{x_2^2+1}{x_1+1}$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$;
d) valoarea parametrului real a pentru care vârful parabolei asociate funcţiei este situat pe dreapta $ax+y+1=0$;
e) imaginea funcţiei f;
f) imaginea intervalului $[-1,3]$ prin funcţia f;
g) axa de simetrie a graficului funcţiei f;
h) soluţiile întregi ale inecuaţiei $f(x)+f(x+1)\le 0$;
i) ecuaţia de gradul al II-lea în y ale cărei rădăcini îndeplinesc condiţiile $y_1=x_1+\frac{1}{x_2}, y_2=x_2+\frac{1}{x_1}$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$.

6. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $f(x)=0$ are două rădăcini reale, distincte şi strict negative.
7. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât funcţia f să fie strict crescătoare pe $(-\infty,-2]$ şi strict descrescătoare pe $[-2,\infty)$.
8. Să se determine o relaţie independentă de m între soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$.
9. Să se arate că graficul funcţiei f trece prin cel puţin un punct fix.
10. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât vârful parabolei asociate funcţiei f să fie situat deasupra axei OX.
11. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât vârful parabolei asociate funcţiei f să aibă coordonate numere întregi.
12. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei f nu intersectează graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x^2+x-5$.

FIŞĂ DE AUTOEVALUARE

1. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f(x)=ax^2+bx+c$, astfel încât să aibă vârful în punctul $V(4,-4)$ şi să taie axa OY în punctul $A(0,12)$.
2. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2, g(x)=2x-1$. Să se rezolve inecuaţia $(f\circ g)(x)\le 0$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației

$x^2 - x + m = 0, m \in \mathbb{R}$, verifică inegalitatea $\frac{x_1+1}{x_2+1} + \frac{x_2+1}{x_1+1} \le 2.$

Timp de lucru: 30 min.

Barem de corectare

Exercițiul 1

- calcularea valorii lui $c = 12$ 0,5p
- deducerea relației $b = -8a$ 0,5p
- deducerea relației $\Delta = 16a$ 0,5p
- calcularea valorii lui $a = 1$ 0,75p
- calcularea valorii lui $b = -8$ 0,5p
- finalizare $f(x) = x^2 - 8x + 12$ 0,25p

Exercițiul 2

- calcularea compusei $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 10x + 6$ 1p
- rezolvarea ecuației $4x^2 - 10x + 6 = 0$ 1p
- obținerea soluției inecuației $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ 1p

Exercițiul 3

- scrierea relațiilor lui Viete $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = m$ 0,5p
- obținerea inegalității $\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} \le 0$ 0,75p
- calcularea lui $x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2m$ 0,5p
- obținerea inecuației $\frac{1-4m}{m+2} \le 0$ 0,5p
- finalizare $m \in (-\infty, -2) \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$ 0,75p

Se acordă 1 punct din oficiu.
Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Capitolul 2

PROGRESII

Competenţe generale :

1. Folosirea terminologiei specifice matematicii în contexte variate de aplicare
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural sau contextual, cuprinse în enunţuri matematice
3. Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice în rezolvarea de probleme
4. Exprimarea şi redactarea coerentă, în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvării sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme
5. Analiza de situaţii-problemă, în scopul descoperirii de strategii pentru optimizarea soluţiilor
6. Generalizarea unor proprietăţi prin modificarea contextului iniţial de definire a problemei sau prin generalizarea algoritmilor

Obiective :

1. Recunoaşterea unor corespondenţe care sunt şiruri, progresii aritmetice sau geometrice.
2. Calcularea valorilor unor şiruri care modelează situaţii practice în scopul caracterizării acestora.
3. Alegerea şi utilizarea unor modalităţi adecvate de calculare a elementelor unui şir.

PROGRESII

FIŞĂ DE DOCUMENTARE

Progresia aritmetică este un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ care are proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obţine din precedentul termen (ca rang), prin adunarea unui număr constant numit **raţia** progresiei (notată cu r). Se notează $a_n \div$.

- **Condiţia necesară şi suficientă** ca un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ să fie progresie aritmetică este ca

$$a_{n+1} - a_n = const. \text{ (= r) }, n \in \mathbb{N}^*.$$

- Formula **termenului general** : $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- **Suma** primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} .$$

- Condiţia ca trei termeni consecutivi ai unui şir să fie în progresie aritmetică :

$$(\div) a, b, c \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2} .$$

Progresia geometrică este un şir $(a_n)_{n\ge 1}$ care are proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obţine din precedentul termen (ca rang), prin înmulţirea unui număr constant numit **raţia** progresiei (notată cu q). Se notează $a_n \div\div$.

- **Condiţia necesară şi suficientă** ca un şir $(a_n)_{n\ge 1}$ să fie progresie geometrică este ca

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = const. \text{ (= q)}, n \in \mathbb{N}^*.$$

- Formula **termenului general** : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*$.
- **Suma** primilor n termeni ai unei progresii geometrice

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \begin{cases} \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} & ,q \ne 1 \\ n \cdot a_1 & ,q = 1 \end{cases},\ q \ne 1.$$

- Condiţia ca trei termeni consecutivi ai unui şir să fie în progresie geometrică :

$$(\div\div)a,b,c \Leftrightarrow b^2 = a \cdot c.$$

FIŞĂ DE LUCRU

1) Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_1 = -3$ şi raţia $r = 3$.
   a) Să se calculeze a_{12}.
   b) Să se verifice dacă 396 este termen al şirului nostru.
2) Ştiind că numerele 5,12,19, ..., 474, sunt în progresie aritmetică, să se calculeze numărul lor.
3) Fie şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ cu termenul general $a_n = 3n + 2$.Să se demonstreze că şirul a_n este o progresie aritmetică şi sa se precizeze care este raţia şi primul termen.
4) Fie progresia aritmetică a_n, în care $a_5 + a_8 = 28$ şi $S_{10} = 120$. Determinaţi a_{2011} şi S_{50}.
5) Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ ştiind că $x+1,\ 2x-3$ şi $x-3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
6) Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia $1+13+25+...+x=550$.
7) Fie $(b_n)_{n\ge 1}$ o progresie geometrică, având ca termen general $b_n = -3 \cdot 2^n$. Stabiliţi primul termen şi raţia acestei progresii.
8) Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\ge 1}$.Să se determine primul termen şi raţia progresiei ştiind că raportul dintre primul termen şi al patrulea este $\frac{1}{8}$ şi că $b_2 = 3$.
9) Fie $(b_n)_{n\ge 1}$ o progresie geometrică, având ca termen general $b_n = -4 \cdot 3^n$.

Stabiliţi primul termen şi raţia acestei progresii.

10) Calculaţi suma : $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{23}}=$

11) Să se determine x $\in$ astfel încât tripletul de numere să fie în progresie geometrică: 3x-1, x+3, 9-x.

12) Progresia geometrică $\left(b_n\right)_{n\geq1}$ de raţie q este definită de relaţiile

$$\begin{aligned} b_5-b_4-b_3&=4\\ b_5-b_4&=2b_3\end{aligned}.$$

Determinaţi b_1 şi q.

13) Să se arate că dacă a, b, c, sunt în progresie aritmetică atunci $a^2\left(b+c\right)$, $b^2\left(c+a\right)$ şi $c^2\left(a+b\right)$ sunt tot în progresie aritmetică.

FIŞĂ DE AUTOEVALUARE

1) Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_1=2$ şi raţia $r=2$.
   a. Să se calculeze a_7.
   b. Să se verifice dacă 942 este termen al şirului nostru.

2) Fie $\left(b_n\right)_{n\geq1}$ o progresie geometrică, având ca termen general $b_n=-4^{n+1}$.Stabiliţi primul termen şi raţia acestei progresii.
3) Să se determine x $\in$ astfel încât tripletul de numere 5-x, x+7, 3x+11 să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
4) Calculaţi suma : $1+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{20}}=$
5) Progresia geometrică $\left(b_n\right)_{n\geq1}$ de raţie q este definită de relaţiile

$$\begin{aligned} b_1+b_2+b_3&=7\\ b_2+b_3+b_4&=14\end{aligned}.$$

Determinaţi b_1 şi q.

6) Să se arate că dacă a, b, c, sunt în progresie aritmetică atunci a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab sunt tot în progresie aritmetică.

Timp de lucru: 50 min.

Barem de corectare

Exerciţiul 1

- calcularea valorii lui $a_7 = 14$ 0,5p
- înlocuirea în relaţia $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ a elementelor cunoscute…... 0,5p
- determinarea lui n= 471.. 0,5p

Exerciţiul 2

- scrierea termenului $b_1 = -16$ 0,5p
- scrierea termenului $b_{n+1} = -4^{n+2}$ 0,5p
- calcularea valorii lui $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 4$ 0,5p

Exerciţiul 3

- scrierea formulei $b^2 = a \cdot c$ 0,5p
- determinarea ecuaţiei $4x^2 + 10x - 6 = 0$ 0,5p
- determinarea lui $x \in \left\{-3, \dfrac{1}{2}\right\} \cap \mathbb{Z} = \{-3\}$ 0,5p

Exerciţiul 4

- identificarea elementelor progresiei geometrice 0,5p
- scrierea formulei $S_n = \dfrac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q-1}$ 0,5p
- finalizare $S_n = \dfrac{3^{22} - 3}{2 \cdot 3^{21}}$ 0,5p

Exerciţiul 5

- înlocuirea termenilor b_2, b_3, b_4 în relaţiile date de problemă............. 0,5p
- determinarea lui $q = 2$ 0,5p
- determinarea lui $b_1 = 1$ 0,5p

Exerciţiul 6

- $(\div) a, b, c \Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2} \Leftrightarrow 2b = a + c \, (1)$ 0,5p
- Dacă presupunem că

$$(\div) a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab \Leftrightarrow b^2 - ac = \frac{a^2 - bc + c^2 - ab}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\left(b^2 - ac\right) = a^2 - bc + c^2 - ab \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - bc - ab \Leftrightarrow$$

$$2b^2 = \left(a+c\right)^2 - b\left(c+a\right) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 2b^2 = \left(2b\right)^2 - b \cdot 2b \Leftrightarrow$$

$2b^2 = 4b^2 - 2b^2 \Leftrightarrow 2b^2 = 2b^2$ relaţie adevărată 1p

Se acordă 1 punct din oficiu.
Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Bibliografie

1. **Ganga Mircea** : Matematică. Manual pentru clasa a IX-a.Trunchi comun+curriculum diferenţiat, Editura Mathpress, Ploieşti, 2008
2. **Burtea Marius,Burtea Georgeta**: Matematică. Manual pentru clasa a IX-a. Trunchi comun+curriculum diferenţiat, Editura Carminis, Piteşti, 2009
3. Variante Bacalaureat 2008