# Noţiuni de bază

**Definiţia 1.1** Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$ a numerelor reale, $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulţimii $D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că funcţia $f$ are derivată în punctul $x_0$ dacă există limita (în $\overline{\mathbb{R}}$):

(1.1) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă funcţia $f$ are derivată în punctul $x_0$, atunci limita (1.1) se numeşte derivata funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi se notează cu $f'(x_0)$, sau $\frac{df}{dx}(x_0)$. Aşadar $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Daca funcţia $f$ are derivată in punctul $x_0$ şi derivata $f'(x_0)$ este finită (adică $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ ), atunci spunem că funcţia $f$ este derivabilă în punctul $x_0$.

**Observaţia 1.2** Problema existenţei derivatei şi a derivabilităţii unei funcţii nu se pune în punctele izolate ale mulţimii de definiţie ale funcţiei $f$.

**Observaţia 1.3** Derivabilitatea unei funcţii într-un punct este o proprietate: funcţia poate fi sau nu derivabilă în acel punct. Derivata unei funcţii într-un punct este un număr (finit sau infinit).

**Definiţia 1.4** Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $D_0$ o submulţime nevidă a lui $D$.

Spunem că funcţia $f$ are derivată pe mulţimea $D_0$ (respectiv că funcţia $f$ este derivabilă pe mulţimea $D_0$) daca funcţia $f$ are derivată ( respectiv este derivabilă) în fiecare punct al mulţimii $D_0$.

Daca funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe mulţimea de definiţie $D$, atunci spunem simplu că funcţia $f$ este derivabilă.

Daca funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe mulţimea $D_0 \subseteq D$, atunci funcţia $\varphi : D_0 \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi(x) = f'(x)$, oricare ar fi $x \in D_0$, se numeşte derivata funcţiei $f$ pe mulţimea $D_0$ şi se notează cu $f'$.

Operaţia de obţinere a lui $f'$ din $f$ se numeşte derivarea funcţiei $f$.

**Teorema 1.5** Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulţimii $D$. Dacă funcţia $f$ este derivabilă în punctul $x_0$, atunci funcţia $f$ este continuă în punctul $x_0$.

**Observaţia 1.6** Dacă funcţia $f$ este derivată infinită în punctul $x_0$, nu rezultă că $f$ este continuă în acest punct.

**Teorema 1.7** Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in D$.

a) Spunem că funcţia $f$ are derivată la stânga în punctul $x_0$, dacă $x_0 \in (D \cap ]-\infty, x_0])'$ şi există limita (în $\overline{\mathbb{R}}$):

(1.2) $$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă funcţia $f$ are derivată la stânga în punctul $x_0$, atunci limita (1.2) se numeşte derivata la stânga a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi se notează cu $f_s'(x_0)$. Aşadar

$$f_s'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă funcţia $f$ are derivată la stânga în punctul $x_0$ şi derivata $f_s'(x_0)$ este finită (adică $f_s'(x_0) \in \mathbb{R}$), atunci spunem că funcţia $f$ este derivabilă la stânga în punctul $x_0$.

b) Spunem că funcţia $f$ are derivată la dreapta în punctul $x_0$, dacă $x_0 \in (D \cap [x_0, +\infty[)'$ şi există limita (în $\overline{\mathbb{R}}$):

(1.3) $$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă funcţia $f$ are derivată la dreapta în punctul $x_0$, atunci limita (1.3) se numeşte derivata la dreapta a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi se notează cu $f_d'(x_0)$. Aşadar

$$f_d'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă funcţia $f$ are derivată la dreapta în punctul $x_0$ şi derivata $f_d'(x_0)$ este finită (adică $f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$), atunci spunem că funcţia $f$ este derivabilă la dreapta în punctul $x_0$.

Derivatele $f_s'(x_0)$ şi $f_d'(x_0)$ se numesc derivate laterale.

**Observaţia 1.8** Dacă $D=[a,b]$ cu $a,b\in\mathbb{R}$ şi $a<b$, atunci faptul că funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are derivată în punctul $a$ (respectiv în punctul $b$) revine la aceea că $f$ are derivată la dreapta în punctul $a$ (respectiv la stânga în punctul $b$).

**Teorema 1.9** Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$, $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0\in]a,b[$.

$1^0$ Dacă funcţia $f$ are derivată în punctul $x_0$, atunci funcţia $f$ are derivată atât la stânga cât şi la dreapta în punctul $x_0$ şi

$$f_s^{'}(x_0)=f_d^{'}(x_0)=f^{'}(x_0).$$

$2^0$ Dacă funcţia $f$ are derivată atât la stânga cât şi la dreapta în punctul $x_0$ şi $f_s^{'}(x_0)=f_d^{'}(x_0)$, atunci funcţia $f$ are derivată în punctul $x_0$ şi

$$f^{'}(x_0)=f_d^{'}(x_0)=f_s^{'}(x_0).$$

**Teorema 1.10** Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0\in D$.

$1^0$ Dacă $x_0\in(D\cap]-\infty,x_0])'$ şi funcţia $f$ este derivabilă la stânga în punctul $x_0$, atunci funcţia $f$ este continuă la stânga în punctul $x_0$.

$2^0$ Dacă $x_0\in(D\cap[x_0,\infty[)'$ şi funcţia $f$ este derivabilă la dreapta în punctul $x_0$, atunci funcţia $f$ este continuă la dreapta în punctul $x_0$.

Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval, $x_0\in\operatorname{int}I$, $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă în punctul $x_0$ şi $G=\{(x,f(x)):x\in I\}$ graficul funcţiei $f$.

A) dacă funcţia $f$ are derivată în punctul $x_0$, atunci:

a) Dacă $f^{'}(x_0)\in\mathbb{R}$ (adică funcţia $f$ este derivabilă în punctul $x_0$), atunci graficul $G$ al funcţiei $f$ are tangentă în punctul $M_0(x_0,f(x_0))$; tangenta în $M_0$ la graficul $G$ al funcţiei $f$ are ecuaţia

$$y-f(x_0)=f^{'}(x_0)(x-x_0).$$

b) Dacă $f^{'}(x_0)\in\{-\infty,+\infty\}$, atunci graficul $G$ al funcţiei $f$ are tangentă în punctul $M_0(x_0,f(x_0))$; tangenta în $M_0$ la graficul $G$ al funcţiei $f$ are ecuaţia $x=x_0$ (tangenta este paralelă cu axa $Oy$).

B) Dacă funcţia $f$ nu are derivată în punctul $x_0$, dar există derivatele laterale ale funcţiei $f$ în punctul $x_0$, atunci:

a) dacă $f_d^{'}(x_0)=+\infty$ şi $f_s^{'}(x_0)=-\infty$, sau invers, atunci punctul $(x_0, f(x_0))$ se numeşte punct de întoarcere al graficului funcţiei $f$.

b) dacă cel puţin una din derivatele laterale $f_d^{'}(x_0)$ sau $f_s^{'}(x_0)$ este finită, atunci punctul $(x_0, f(x_0))$ se numeşte punct unghiular al graficului funcţiei $f$.

**Teorema 1.11** Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulţimii $D$.

$1^0$ Dacă funcţiile $f: D \to \mathbb{R}$ şi $g: D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul $x_0$, atunci funcţia sumă $f+g: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în puncul $x_0$ şi

$$(f+g)^{'}(x_0)=f^{'}(x_0)+g^{'}(x_0)$$

$2^0$ Dacă funcţia $f: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0$ şi $c$ este un număr real, atunci funcţia $cf: D \to \mathbb{R}$ ete derivabilă în punctul $x_0$ şi

$$(cf)^{'}(x_0)=cf^{'}(x_0).$$

$3^0$ Dacă funcţiile $f: D \to \mathbb{R}$ şi $g: D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul $x_0$, atunci funcţia produs $fg: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0$ si

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

$4^0$ Dacă funcţiile $f: D \to \mathbb{R}$ şi $g: D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în punctul $x_0$, şi $g(x_0)\neq 0$,atunci funcţia cât $f/g: D\setminus\{x \in D: g(x)=0\} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0$ şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**Teorema 1.12** Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$.

$1^0$ Dacă funcţiile $f: D \to \mathbb{R}$ şi $g: D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe mulţimea $D$, atunci funcţia sumă $f+g: D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe mulţimea $D$ şi

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x), \text{ oricare ar fi } x \in D,$$

adică

$$(f+g)'=f'+g'.$$

$2^0$ Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe mulţimea $D$ şi $c$ este un număr real, atunci funcţia $cf : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe mulţimea $D$ şi

$$(cf)'(x) = cf'(x), \text{ oricare ar fi } x \in D,$$

adică

$$(cf)' = cf'.$$

$3^0$ Dacă funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$ şi $g : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe mulţimea $D$, atunci funcţia produs $fg : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe mulţimea $D$ şi

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \text{ oricare ar fi } x \in D,$$

adică

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

$4^0$ Dacă funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$ şi $g : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe mulţimea $D$ şi $g(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in D$, atunci funcţia cât $f / g : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe mulţimea $D$ şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

adică,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

**Teorema 1.13** (teorema de derivare într-un punct a funcţiilor compuse) Fie $I$ şi $J$ două intervale ale mulţimii $\mathbb{R}$, $u : I \to J$ şi $f : J \to \mathbb{R}$. Dacă funcţia $u$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi funcţia $f$ este derivabilă în punctul $y_0 = u(x_0)$, atunci funcţia compusă $f \circ u : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0$ şi

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0).$$

**Teorema 1.14** (teorema de derivare a funcţiilor compuse) Fie $I$ şi $J$ două intervale ale mulţimii $\mathbb{R}$, $u : I \to J$ şi $f : J \to \mathbb{R}$. Dacă funcţia $u$ este derivabilă pe $I$ si functia $f$ este derivabilă pe $J$, atunci funcţia compusa $f \circ u : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe $I$ şi

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x))u'(x), \text{ oricare ar fi } x \in I,$$

adică

$$(f \circ u)' = (f' \circ u)u'.$$

**Teorema 1.15** (teorema de derivare într-un punct a funcţiei inverse) Fie $I$ şi $J$ două intervale ale mulţimii $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ o funcţie bijectivă şi $x_0 \in I$.

Dacă:

(i) funcţia $f$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$;

(ii) $f'(x_0) \neq 0$;

(iii) funcţia $f^{-1} : J \to I$ este continuă în punctul $y_0 = f(x_0)$,

atunci funcţia inversă $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în punctul $y_0$ şi

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Teorema 1.16** (teorema de derivare a funcţiei inverse) Fie $I$ şi $J$ două intervale ale mulţimii $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ o funcţie bijectivă. Dacă

(i) funcţia $f$ este derivabilă pe $I$;

(ii) $f'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I$,

atunci funcţia inversă $f^{-1}$ este derivabilă pe $J$ şi

$$(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \text{ oricare ar fi } x \in J,$$

adică

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

**Teorema 1.17** Funcţiile elementare sunt derivabile pe orice interval deschis inclus în mulţimea lor de definiţie.

Avem următoarele reguli de derivare ($u$ este o funcţie derivabilă):

1) $(u^n)' = nu^{n-1}u',\ n \in \mathbb{N}$;

2) $(u^r)' = ru^{r-1}u',\ r \in \mathbb{R}$;

3) $(\ln u)' = u'/u$;

4) $(a^u)' = a^u u' \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1$;

5) $(e^u)' = (e^u)u'$;

6) $(\sin u)' = (\cos u)u'$;

7) $(\cos u)' = -(\sin u)u'$;

8) $(\tan u)' = u' / (\cos^2 u)$;

9) $(\cot u)' = -u' / (\sin^2 u)$;

10) $(\arcsin u)' = u' / \sqrt{1-u^2}$;

11) $(\arccos u)' = -u' / \sqrt{1-u^2}$;

12) $(\arctan u)' = u' / (1+u^2)$;

13) $(\mathrm{arc}\cot u)' = -u' / (1+u^2)$.

Adăugăm că dacă $u$ şi $v$ sunt funcţii derivabile şi $u > 0$, atunci funcţia $u^v = e^{v \ln u}$ este derivabilă şi

$$(u^v)' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

**Definiţia 1.18** Fie $D$ o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulţimii $D$. Spunem că funcţia $f$ este derivabilă de două ori în punctul $x_0$ dacă există o vecinătate $U$ a punctului $x_0$ astfel încât funcţia $f$ este derivabilă pe $D \cap U$ şi funcţia $f' : D \cap U \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0$.

Derivata lui $f'$ în punctul $x_0$ se numeşte derivata a doua (sau derivata de ordinul doi) a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi se notează cu $f''(x_0)$ sau $f^{(2)}(x_0)$ sau $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.

Dacă funcţia $f$ este derivabilă de două ori în orice punct $x$ al unei submulţimi nevide $I$ a lui $D$, atunci spunem că funcţia $f$ este derivabilă de două ori pe mulţimea $I$; funcţia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi(x) = f''(x)$, oricare ar fi $x \in I$ se numeşte derivata a doua (sau derivata de ordinul doi) a funcţiei $f$ pe mulţimea $I$ şi se notează cu $f''$ sau $f^{(2)}$ sau $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte derivabilă de $n$ ori ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) în punctul $x_0$ dacă există o vecinătate $U$ a punctului $x_0$ astfel încât funcţia $f$ este derivabilă de ($n-1$) ori pe $D \cap U$ şi funcţia $f^{(n-1)} : D \cap U \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0$.

Derivata lui $f^{(n-1)}$ în punctul $x_0$ se numeşte derivata a $n$-a (sau derivata de ordinul $n$) a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi se notează cu $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.

Dacă funcţia $f$ este derivabilă de $n$ ori în orice punct $x$ al unei submulţimi nevide $J$ al lui $D$, atunci spunem că funcţia $f$ este derivabilă de $n$ ori pe mulţimea $J$; funcţia $\psi : J \to \mathbb{R}$ definită prin $\psi(x) = f^{(n)}(x)$, oricare ar fi $x \in J$ se numeşte derivata a $n$-a (sau derivata de ordinul $n$) a funcţiei $f$ pe mulţimea $J$ şi se notează cu $f^{(n)}$ sau $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Prin convenţie, se defineşte derivata de ordinul zero, $f^{(0)}$, ca fiind funcţia $f$ şi derivata de ordinul întâi, $f^{(1)}$ ca fiind derivata $f'$. Se scrie uneori $f'''$ în loc de $f^{(3)}$, $f^{iv}$ în loc de $f^{(4)}$ ş.a.m.d.

Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă de ordinul $n$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, pe mulţimea $L \subseteq D$, atunci se spune că funcţia f este indefinit derivabilă pe mulţimea $L$.

Are loc următoarea afirmaţie:

**Teorema 1.19** Funcţiile elementare sunt indefinit derivabile pe orice interval deschis inclus în mulţimea lor de definiţie.

**Teorema 1.20** (formula lui Leibniz relativă la derivata de ordinul $n$ a produsului a două funcţii) Fie $I$ un interval din $\mathbb{R}$ şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile de $n$ ori pe $I$. Atunci funcţia produs $fg$ este derivabilă de $n$ ori pe $I$ şi

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x), \forall x \in I .$$

adică

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} .$$

**Teorema 1.21** Numărul real $x_0$ este rădăcină de ordinul $k$ a funcţiei polinomiale $P$ dacă şi numai dacă

$$P(x_0) = P'(x_0) = ... = P^{(k-1)}(x_0) = 0, \ \ P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$